

任意取向多个介质旋转椭球的散射场

吴振森¹, 汤 炜^{1,2}, 李清亮², 吴信宝³

(1. 西安电子科技大学理学院, 陕西西安 710071; 2. 中国电波传播研究所, 河南新乡 453003; 3. 上海微波技术研究所, 上海 200063)

摘 要: 本文提出了一种用于计算任意取向多个介质椭球电磁散射的混合方法. 利用扩展边界条件 (EBC) 导出具有旋转轴对称单个椭球以球面波矢量函数为基底的 T 矩阵, 结合球矢量波函数旋转定理和递推 T 矩阵方法, 给出多个任意取向介质椭球的散射场. 数值例子验证了该混合方法的计算精度和有效性.

关键词: 任意取向介质椭球; 扩展边界条件法; T 矩阵方法; 电磁散射

中图分类号: TN011 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2003) 04-0638-03

Scattering of Multiple Spheroids with Arbitrary Orientations

WU Zhen-sen¹, TANG Wei^{1,2}, LI Qing-liang², WU Xin-bao³

(1. Science of School, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China;

2. China Research Institute Radiowave Propagation, Xinxiang, Henan 453003, China;

3. Shanghai Research Institute of Microwave Technology, Shanghai 200063, China)

Abstract: This paper presents a hybrid scheme for calculation many dielectric spheroids in arbitrary orientations. Firstly, the T matrix of single particle with symmetrical axis is obtained by extend boundary condition method, and that of the prolate spheroids, as an example, can be work out easily. Then combining with vector spherical wave functions rotation theory and recursive T matrix algorithm, the scheme can figure out the scattering field of many spheroids in arbitrary orientations. Verifications of the method are provided with numerical examples.

Key words: dielectric spheroid with arbitrary orientation; extend boundary condition (EBC); T matrix method; electromagnet scattering

1 引言

1965年, W C Waterman 将传输矩阵 (T 矩阵) 理论推广到电磁领域, 为电磁散射计算提供了一种新的解析方法. T 矩阵是用来联系散射体输入系数和输出系数的纽带, 三维多数情况下以球矢量波函数^[1]为基底. 相对其他波函数, 球矢量波函数具有简单、应用范围广等特点. 另外也可通过求解波函数方程, 得到一些特殊问题的波函数. 如计算椭球时, 仍可采用椭球波函数基底^[2,3], 此时, 运算速度和精度都很好. 但该方法适用面窄, 只有极少问题能得到本征波函数, 且理论难度较大. 多体球的研究最早于 1935 年, 在 60~70 年代, 波函数加法定理^[4]得到了长足发展, 为多体散射计算提供了良好数学基础. 80 年代末, 美国学者 W C Chew^[5]等人在综合前人的基础上, 提出了系列递推 T 矩阵系列算法, 为多目标计算提供了一种紧凑快捷方法. 因为球体和圆柱的 T 矩阵相对简单, 在其发表文献中, 仅计算了多个典则目标的结果, 使递推 T 矩阵没有得到更深的應用.

多椭球粒子计算通常利用椭球波函数及其对应的加法定理来求解. 由于理论的复杂, 计算中通常仅计算两个放置于 Z

轴的粒子, 这样可以简化加法定理的计算. Sinha 和 Macphie 得到两平行放置导体椭球的解析解^[2], Cooray 和 Ciric 计算两个介质椭球^[3]. 椭球波函数旋转定理在较晚时候才得到, 结合加法定理和旋转定理, Cooray 和 Nag 近年分别计算了任意取向的导体椭球、介质椭球和损耗椭球. 本文将利用 T 矩阵的相关方法计算任意数目随意放置的介质椭球的散射场, 且避开对椭球波函数的复杂运算.

2 T 矩阵相关理论的混合算法

本文采用的是 T 矩阵相关理论的混合算法, 通过扩展边界条件和矢量波函数旋转定理求解旋转轴对称任意取向单目标 T 矩阵, 利用该计算结果, 结合递推 T 矩阵, 计算出多目标聚集系统的 T 矩阵, 从而给出该系统的散射场.

2.1 T 矩阵和扩展边界条件法

对一任意散射体, 可把入射波作为散射体系统的输入信号, 散射波可以看作是散射体系统的输出信号, 将他们通过一定的基底来分解, T 矩阵就是联系两分解矢量的一个纽带,

$$E^{inc}(r) = R g \Psi(r) \cdot a$$

$$E^{sca}(r) = \Psi(r) \cdot f$$

$$f = T \cdot a$$

其中, Ψ 为谐波函数, $R_g \Psi$ 为驻波函数, a 是入射波通过驻波函数分解得到的向量, f 是散射波通过谐波函数分解得到的向量。
假设入射场以矢量波函数表示,

$$E^{inc}(r) = \sum_{n,m} \{ a_{mn}^{(M)} R_g \Psi_{Mmn}(kr) + a_{mn}^{(N)} R_g \Psi_{Nmn}(kr) \} \quad (2)$$

通过电场积分方程和格林函数分解结果:

$$\begin{bmatrix} a_{mn}^{(M)} \\ a_{mn}^{(N)} \end{bmatrix} = -ik(-1)^m \int_S \hat{n} \times i\alpha \mu H(r) f \begin{bmatrix} M_{-mn}(kr) \\ N_{-mn}(kr) \end{bmatrix} - ik^2(-1)^m \int_S \hat{n} \times E(r) f \begin{bmatrix} N_{-mn}(kr) \\ M_{-mn}(kr) \end{bmatrix} \quad (3)$$

类似,我们有,

$$E^{sca}(r) = \sum_{n,m} \{ f_{mn}^{(M)} M_{mn}(kr) + f_{mn}^{(N)} N_{mn}(kr) \} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} f_{mn}^{(M)} \\ f_{mn}^{(N)} \end{bmatrix} = ik(-1)^m \int_S \hat{n} \times i\alpha \mu H(r) f \begin{bmatrix} R_g M_{-mn}(kr) \\ R_g N_{-mn}(kr) \end{bmatrix} + ik^2(-1)^m \int_S \hat{n} \times E(r) f \begin{bmatrix} R_g N_{-mn}(kr) \\ R_g M_{-mn}(kr) \end{bmatrix} \quad (5)$$

利用波数为 k_s 的波函数展开表面场:

$$\begin{bmatrix} \hat{n} \times E(r) \\ \hat{n} \times H(r) \end{bmatrix} = \hat{n} \times \sum_{m,n} \left[\frac{C_{m,n}^{(M)}}{(k_s/i\alpha\mu)} d_{m,n}^{(M)} \right] R_g M_{m,n}(k_s r) + \hat{n} \times \sum_{m,n} \left[\frac{C_{m,n}^{(N)}}{(k_s/i\alpha\mu)} d_{m,n}^{(N)} \right] R_g N_{m,n}(k_s r) \quad (6)$$

应用矢量格林定理,连接边界条件及矢量波函数的正交完备性,最终有^[1],

$$T = -R_g Q' Q'^{-1} \quad (7)$$

其中,

$$Q' = \begin{bmatrix} P & R \\ S & U \end{bmatrix}$$

$$P_{mm'h'} = -ik k_s J_{mm'h'}^{(21)} - ik^2 J_{mm'h'}^{(12)} R_{mm'h'} = -ik k_s J_{mm'h'}^{(11)} - ik^2 J_{mm'h'}^{(22)} S_{mm'h'} = -ik k_s J_{mm'h'}^{(22)} - ik^2 J_{mm'h'}^{(11)} R_{mm'h'} = -ik k_s J_{mm'h'}^{(12)} - ik^2 J_{mm'h'}^{(21)} S_{mm'h'} = (-1)^m \int_S \hat{n}(r) \cdot R_g M_{m,h}(k_s r) \times M_{-mn}(kr) f \quad (8a)$$

$$J_{mm'h'}^{(12)} = (-1)^m \int_S \hat{n}(r) \cdot R_g M_{m,h}(k_s r) \times N_{-mn}(kr) f \quad (8b)$$

$$J_{mm'h'}^{(21)} = (-1)^m \int_S \hat{n}(r) \cdot R_g M_{m,h}(k_s r) \times M_{-mn}(kr) f \quad (8c)$$

$$J_{mm'h'}^{(22)} = (-1)^m \int_S \hat{n}(r) \cdot R_g M_{m,h}(k_s r) \times N_{-mn}(kr) f \quad (8d)$$

其中 $dS \hat{n}(r) = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

以旋转椭球体为例, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 有,

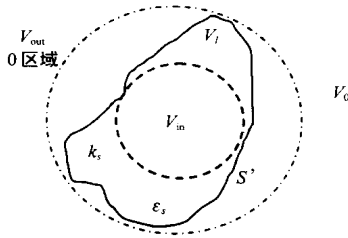


图1 利用扩展边界条件计算 T 矩阵

$$r' = r \{ \theta \} = \left[\frac{\sin^2 \theta'}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta'}{c^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \sigma = \theta' + \theta \int^2 \sin \theta \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2} \right)$$

通过上述的计算表达式,我们可以得出具有固定取向(对称轴为 z 轴)的单个椭球体的 T 矩阵。

2.2 球矢量波函数的旋转定理

大多数情况下,散射体的对称轴与参考系的坐标轴不一致。在多目标散射中,这一问题尤其突出,因为多个粒子很可能不是按同一方向排列。因此, T 矩阵在散射体本身的坐标系中求出后,再转移到整个系统坐标系。如图所示建立系统坐标系与粒子本体坐标系,

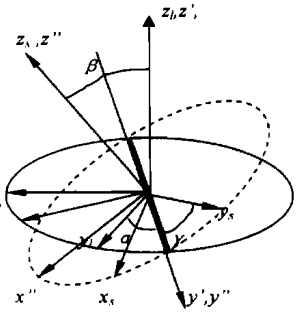


图2 欧拉角旋转示意图

分别依次以 Z_i, Y 和 Z 为旋转轴进行 α, β, γ 的旋转。根据文献^[1],我们有波函数的如下关系:

$$M_{mn}(kr_i) = \sum_m D_{m,m'}^{(n)}(\alpha\beta\gamma) M_{m',n}(kr_s)$$

$$N_{mn}(kr_i) = \sum_m D_{m,m'}^{(n)}(\alpha\beta\gamma) N_{m',n}(kr_s)$$

其中:

$$D_{m,m'}^{(n)}(\alpha\beta\gamma) = e^{im\gamma} d_{m,m'}^{(n)}(\beta) e^{im'\alpha} \quad (9)$$

$$d_{m,m'}^{(n)}(\beta) = \sum_{\sigma} (-1)^{n-m'-\sigma} \frac{[(n+m)! (n-m)! (n+m')! (n-m')!]}{\sigma! (m+m'-\sigma)! (n-m-\sigma)! (n-m'-\sigma)!} \cdot (\sin \frac{\beta}{2})^{2n-2\sigma-m'-m} (\cos \frac{\beta}{2})^{2\sigma+m'+m} \quad (10)$$

波函数旋转定理可写成更为紧密的形式,

$$\Psi(kr_i) = \Psi(kr_s) \cdot D(\alpha\beta\gamma) \quad (11)$$

同样,变换得到

$$\Psi(kr_s) = \Psi(kr_i) \cdot D^{-1}(\alpha\beta\gamma) \quad (12)$$

假设我们已知在无旋转条件下的散射体的 T 矩阵,通过以上的公式,可以得出在欧拉角旋转之后的散射体 T 矩阵,

$$E^{inc}(kr_s) = R_g \Psi(kr_s) \cdot a = R_g \Psi(kr_i) \cdot D^{-1}(\alpha\beta\gamma) \cdot a \quad (13)$$

在上式中,可以看成系统入射波被本体坐标系波函数分解结果,其中,后面两项的乘积可以看作是分解得到的矢量,对应散射场表达式

$$E^{sca}(kr_s) = \Psi(kr_i) \cdot T \cdot D^{-1}(\alpha\beta\gamma) \cdot a = \Psi(kr_s) \cdot D(\alpha\beta\gamma) \cdot T \cdot D^{-1}(\alpha\beta\gamma) \cdot a \quad (14)$$

对比 T 矩阵的定义式,可以得到,散射体经过欧拉角 α, β, γ 旋转后的 T 矩阵为:

$$T_r(\alpha\beta\gamma) = D(\alpha\beta\gamma) \cdot T \cdot D^{-1}(\alpha\beta\gamma) \quad (15)$$

2.3 递推 T 矩阵算法

递推 T 矩阵算法是半解析方法。入射波照射到散射体上,其中一个散射体的入射波可以看作是外界入射波和其余散射体散射波的总和,由于 T 矩阵是已知的,根据 T 矩阵的定义可以得到一组方程。而遍历所有的散射体时,就可以得到一系列的方程,通过求解该方程组,最终可以得到多个目标的散射

解. T 矩阵的递推式具有如下形式^[5],

$$\sum_{i=n+1}^{n+n'} A_{ji} \cdot T_{i(n+n')} \cdot \beta_0 = -T_{j(1)} \cdot [\beta_0 + \alpha_0 \cdot \tau_{(n)}], \quad j = n+1, \dots, n+n' \quad (16)$$

$$\tau_{n+n'} = \tau_{(n)} + \sum_{i=n+1}^{n+n'} (\beta_{0i} + \tau_{(n)} \cdot \alpha_{0i}) \cdot T_{i(n+n')} \cdot \beta_0 \quad (17)$$

其中

$$A_{ji} = \begin{cases} -L_1 - T_{j(1)} \cdot \alpha_{0j} \cdot \tau_{(n)} \cdot \alpha_{0j}, & i = j \\ T_{j(1)} \cdot \alpha_{0j} \cdot \tau_{(n)} \cdot \alpha_{0i} + T_{j(1)} \cdot \alpha_{ji}, & i \neq j \end{cases} \quad (18)$$

以上公式中各个物理量的意义可参考文献^[5]. 递推中, 使用到的 $T_{j(1)}$ 为新增粒子的单体 T 矩阵, 当该粒子的对称轴与系统设定的坐标轴不重合时, 必须先确定两者之间的欧拉角关系, 再用本文的方法得到在系统坐标系下的 T 矩阵作为 $T_{j(1)}$. 递推的初值为 $\tau_{(1)}$, 它表示的是位于系统坐标系的原点的散射体的 T 矩阵.

3 数值计算结果

为验证上述方法在任意取向多椭球中的应用, 计算了两个任意取向椭球形粒子散射. 入射波 Z 轴正向入射, 极化模式为 TE_z 方向, 长半轴长度为 $\lambda/4$, $\varepsilon_r = 3.0$, 两椭球排列在 Z 轴方向, 球心间距离为 d . 其中椭球相对另一椭球的欧拉角 $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$. 计算结果如图 3 所示, 与参考文献^[3]所给数据吻合很好.

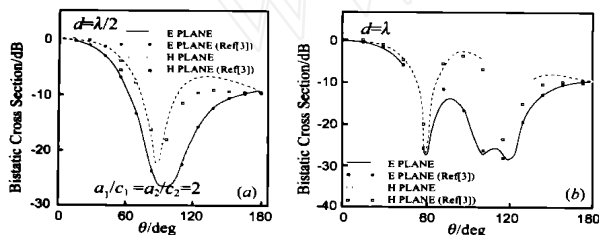


图 3 两介质椭球归一化散射截面

文献^[3]由于加法定理的复杂性, 所以仅给出了两个粒子的算例. 而本文混合方法由于采用的是球面波函数, 在计算上可以突破原有文献的限制, 在此计算了 5 个椭球粒子排列在 XY 平面上, 其几何位置及欧拉角旋转分别为:

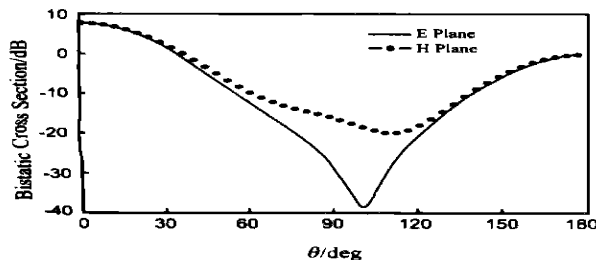


图 4 五个介质椭球的散射截面随散射角的变化

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -45^\circ & -45^\circ & 0^\circ & 45^\circ & 45^\circ \\ 5 \end{bmatrix}^\circ$$

在图 4 显示了 5 个图 3 中粒子的散射场随散射角度的变化. 理论上讲, 计算粒子的数目仅仅受到计算机等硬件的限制, 与上述混合方法本身无关.

4 结论

由于我们采用了扩展边界条件法, 计算的粒子已不再是简单的球体或柱体. 理论上来说, 该方法的简化公式可以计算任意旋转轴的物体, 椭球粒子不过是其中稍微简单一点的特例. 而通过波函数旋转公式, 则可以计算任意取向的粒子, 扩展了计算范围. 计算结果表明递推 T 矩阵方法对于计算规则多个目标散射具有很好的适用性.

参考文献:

- [1] L Tsang, et al. Theory of Microwave Remote Sensing [M]. New York: Wiley, 1985.
- [2] B P Sinha, R H Macphie. Electromagnetic plane wave scattering by a system of two parallel conducting prolate spheroids [J]. IEEE Trans AP, 1983, 31: 294 - 304.
- [3] M F R Cooray, I R Ciric. Scattering of Electromagnetic wave by a system of two spheroids of arbitrary orientation [J]. IEEE Trans AP, 1991, 39(5): 680 - 684.
- [4] S Stein. Addition theorems for spherical wave functions [J]. Quarterly Journal Appl Math, 1961, 19(1): 15 - 24.
- [5] Y M Wang, W C Chew. A recursive T-matrix approach for the solution of electromagnetic scattering by many spheres [J]. IEEE Trans AP, 1993, 41(12): 1633 - 1639.

作者简介:



汤 伟 男, 1974 年生于湖北, 1995 年 7 月武汉大学空间物理系电波传播与天线专业毕业, 获理学学士学位, 1998 年毕业于中国电波传播研究所电磁场与微波技术专业, 获工学硕士学位. 2000 年考入西安电子科技大学, 攻读理学院无线电物理专业博士, 现从事电磁散射, 数值方法等方面的科研工作, 发表文章数篇.

吴振森 男, 1946 年生于湖北, 西安电子科技大学理学院院长, 教授, 博士生导师, 获国家、省部级奖 7 项, 发表学术论文 200 余篇, 主要从事随机介质、非均匀介质中电磁(光)波的传播和散射, 目标与环境光散射特性和电磁散射等方面研究.